

(Fon: L. Ricard) 1997. La educación matemática en la enseñanza. ICE UO, Houston, Brasil.

red de relaciones entre los hechos, conceptos y estructuras matemáticas es prácticamente inagotable, y su capacidad para plantear nuevos algoritmos y generar procedimientos imprevistos es igualmente ilimitada. Por ello, no podemos dar por finalizado el dominio de ningún concepto en un breve periodo de tiempo.

Es distintivo de las matemáticas que todo nuevo conocimiento se ponga, de un modo u otro, en conexión con conocimientos previamente establecidos. De esta forma se consolida el sistema en su globalidad y se mejora la capacidad de razonamiento del alumno.

En este marco general de reflexión debemos tener en cuenta que para insertar el aprendizaje de las matemáticas en la realidad escolar es necesario trabajar en todos los contextos en los que esta materia toma sentido. La escuela no es sólo taller, granja, fábrica, laboratorio o asamblea. Es todo eso y algo más: es el entorno ecológico donde se lleva a cabo la parte principal del proceso de culturización de las generaciones en formación.

4. LAS MATEMÁTICAS COMO ELEMENTO DE CULTURA

Conviene reflexionar, brevemente, sobre la dimensión cultural de las matemáticas dentro del sistema escolar.

Las matemáticas son un ingrediente básico de la cultura, pues existen en un medio social y humano determinado, constituyendo un modo importante de relación y comunicación entre personas, que da forma y permite expresar múltiples actividades del hombre. Las matemáticas son un elemento de la cultura, una herramienta que la interpreta y elabora, puesto que atienden a planes, fórmulas, estrategias y procedimientos que gobiernan la conducta; permiten ordenar el comportamiento del hombre, marcar pautas de racionalidad, y ayudar a que surja y se desarrolle el pensamiento científico. El pensar matemático, que es social y público, consiste en dar significado y compartir un simbolismo lógico, espacial y cuantitativo que permite expresar y desarrollar las capacidades humanas de relación, representación y cuantificación.

Este proceso de enculturación lo denominamos Educación Matemática, proceso que, cuando se lleva a efecto en el sistema escolar obligatorio, debe abarcar dos niveles: alfabetización matemática básica, constituido por los conocimientos elementales y competencias básicas sobre números, formas y relaciones, y perfeccionamiento matemático, conocimientos necesarios para desenvolverse con holgura en la sociedad y desempeñar un puesto profesional de cualificación media. Queda un tercer nivel, el de especialización, ajeno a la escolaridad obligatoria, que se manifiesta en la utilización de conocimientos matemáticos de alto nivel de complejidad, y que se presenta en sectores sociales y profesionales con mayor nivel de responsabilidad científica, económica o cultural.

El proceso de enculturación que llamamos Educación Matemática se lleva a efecto principalmente mediante la enseñanza y el aprendizaje de determinados conocimientos matemáticos básicos a los que hemos denominado, globalmente, matemáticas escolares.

1. Ingredientes

2. Enculturar

Constituye un rasgo distintivo de las sociedades con mayor avance científico y técnico contemplar la Educación Matemática como uno de los elementos esenciales en la preparación de las generaciones en formación. Uno de los retos clave en el momento actual consiste en la democratización de la cultura, siendo por ello necesaria la incorporación de la totalidad de la población al conocimiento, los valores y las pautas de actuación marcados por la Educación Matemática, de manera que nuestra disciplina deje de ser un criterio fuerte de discriminación y pase a constituir un factor más de la necesaria igualdad básica entre los ciudadanos que preconiza una sociedad democrática.

5. FINES Y METAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Las razones con las que usualmente se justifica la presencia de las matemáticas en la educación obligatoria responden a tres tipos de argumentos.

En primer lugar, se considera que las matemáticas tienen un alto valor formativo porque desarrollan las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal. En este sentido, las matemáticas son valiosas ya que permiten lograr mentes bien formadas, con una adecuada capacidad de razonamiento y organización.

En segundo lugar, aprender matemáticas tiene interés por su utilidad práctica. Las matemáticas aparecen en todas las formas de expresión humana, permiten codificar información y obtener una representación del medio social y natural, suficientemente potente como para permitir una actuación posterior sobre dicho medio. Al describir un fenómeno en términos de un modelo matemático se pueden inferir conclusiones lógicas sobre el modelo que predicen el comportamiento futuro del fenómeno y, de ahí, conjeturar los cambios que se pueden producir o las regularidades que se van a mantener.

En tercer lugar, las matemáticas proporcionan, junto con el lenguaje, uno de los hilos conductores de la formación intelectual de los alumnos. Las matemáticas necesitan de un desarrollo continuo y progresivo que, a su vez, permite apreciar el desarrollo alcanzado por el alumno. La madurez alcanzada por cada niño a lo largo de su formación escolar tiene dos indicadores principales: su capacidad de expresión verbal —que se pone de manifiesto en su dominio del lenguaje— y su capacidad de razonamiento —puesta de manifiesto por las matemáticas, de modo destacado. Por otra parte, debido a su carácter de herramienta, las matemáticas suponen un instrumento común de trabajo para el resto de las disciplinas.

«A lo largo de la educación obligatoria las matemáticas han de desempeñar, indisoluble y equilibradamente, un papel formativo básico de capacidades intelectuales, un papel aplicado, funcional, y un papel instrumental en cuanto armazón formalizador de conocimientos en otras materias.» (Real Decreto 1345/1991)

3. accesos

4. Justificación

5. Características

Desde una perspectiva más general la enseñanza de las matemáticas debe satisfacer las necesidades formativas y de desarrollo de las capacidades cognitivas y afectivas de los escolares; también debe considerar las finalidades sociales, que comprenden el dominio de destrezas matemáticas básicas por todos los ciudadanos y la formación de profesionales cualificados, productores de conocimientos matemáticos. Las finalidades culturales, que ya se han mencionado, forman parte de la orientación que debe tener la enseñanza de las matemáticas, destacando el carácter histórico, incompleto y culturalmente mediado del conocimiento matemático, así como sus conexiones con otras ramas del conocimiento. Finalmente, la enseñanza de las matemáticas debe estar orientada por principios éticos, dirigida a la consecución de valores democráticos y vinculada al ejercicio fundado de la crítica.

Inicio del módulo 2

6. NOCIÓN DE CURRÍCULO

En su acepción educativa, el concepto de currículo se ha convertido en un término genérico con el que se denomina toda actividad que planifique una formación. Recientemente hemos dedicado una extensa reflexión al Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria (Rico, 1997), por lo que remitimos a ese trabajo al lector interesado en un estudio teórico más extenso. Destacamos en este apartado algunas ideas adecuadas a nuestro propósito.

El currículo de la Educación Obligatoria es un plan de formación que se propone dar respuesta a las siguientes cuestiones:

¿Qué es, en qué consiste el conocimiento?

¿Qué es el aprendizaje?

¿Qué es la enseñanza?

¿Qué es, en qué consiste el conocimiento útil?

La intención del currículo es ofrecer propuestas concretas sobre:

- modos de entender el conocimiento,
- interpretar el aprendizaje,
- poner en práctica la enseñanza,
- valorar la utilidad y dominio de los aprendizajes realizados.

Estas cuestiones marcan dimensiones prioritarias para organizar la reflexión curricular, pero no señalan su contenido explícito.

La primera cuestión ¿qué es el conocimiento? sirve de referencia para otras cuestiones más precisas, tales como:

¿qué es, en qué consiste el conocimiento matemático?

¿qué características relevantes diferencian este conocimiento de otros?

¿por qué es importante este conocimiento?

¿qué relaciones sostiene el conocimiento matemático con las determinaciones culturales de nuestra sociedad?

La discusión sobre ¿qué es el conocimiento matemático? no es trivial y afecta profundamente al diseño y desarrollo del currículo de matemáticas.

La segunda cuestión: ¿qué es el aprendizaje? interviene en el diseño y desarrollo del currículo. También esta cuestión genérica encierra un núcleo amplio de cuestiones importantes:

¿en qué consiste el aprendizaje?,

¿cómo se produce? ¿cómo aprenden niños y jóvenes?

el aprendizaje, ¿es resultado de una evolución o efecto de la instrucción, o de ambas cosas?

¿qué función tiene una teoría del aprendizaje?

Por lo que se refiere a nuestra disciplina la pregunta básica se enuncia así:

¿cómo se caracteriza el aprendizaje de las matemáticas?

Todo currículo de matemáticas necesita estar basado en alguna teoría o esquema conceptual que permita dar respuesta fundada a cuestiones generales como las siguientes:

¿cómo son las personas en el trabajo con matemáticas?

¿cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?

¿en qué consiste la capacidad matemática?

La tercera cuestión ¿qué es la enseñanza? da también lugar a una diversificación de cuestiones específicas y precisas. Entre estas cuestiones encontramos las siguientes:

¿en qué consiste educar?

¿en qué consiste la educación matemática?

¿cómo puede llevarse a cabo la formación de niños y jóvenes en un campo específico del conocimiento?

¿en qué consiste la instrucción?

Finalmente, la cuarta cuestión ¿para qué sirve el conocimiento? admite una serie de cuestiones más precisas:

¿cómo se establece la utilidad del conocimiento matemático?

¿cuándo un individuo dispone de conocimiento útil?

¿qué criterios determinan la capacidad-matemática de una persona?

¿mediante qué instrumentos se valora la capacidad matemática de una persona?

¿cuáles son los mecanismos sociales que sostienen esa valoración?

¿mediante qué criterios se valora la eficacia de un currículo?

¿cómo y con qué criterios se valora la capacidad de un profesor o de unos materiales curriculares?

¿qué mecanismos permiten modificar un currículo, cómo se ponen en práctica?

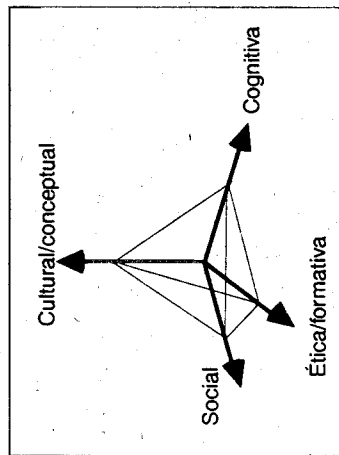
¿quiénes tienen la responsabilidad de la valoración y de los cambios?

6.1 Dimensiones del currículo

Las cuatro cuestiones consideradas permiten establecer cuatro dimensiones en torno a las que organizar los niveles de reflexión curricular (Rico, 1997).

Estas cuatro dimensiones son:

- Dimensión cultural/ conceptual
- Dimensión cognitiva
- Dimensión ética
- Dimensión social



Dimensiones del currículo

Estas cuatro dimensiones las hemos considerado cuando hemos reflexionado sobre las finalidades de la enseñanza de las matemáticas. Igualmente se pueden considerar otros niveles de reflexión sobre el currículo, que se pueden analizar en términos de estas cuatro dimensiones.

Dos de los niveles de reflexión usuales en los estudios sobre el currículo de matemáticas son el nivel de planificación para el aula y el nivel de planificación para el sistema educativo –ambos niveles están fuertemente conectados y pueden estructurarse mediante las mismas cuatro dimensiones, pero se trata de niveles distintos. En el cuadro se presentan las componentes por cada dimensión de los dos niveles mencionados:

Dimensiones =====	1ª dimensión: Cultural/ conceptual	2ª dimensión: Cognitiva o de desarrollo	3ª dimensión: Ética o formativa	4ª dimensión: Social
Planificación para el aula	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
Sistema Educativo	Conocimientos	Alumnos	Profesor	Escuela

Niveles y dimensiones en el estudio del currículo

Como desarrollo de las directrices generales que marcan los documentos oficiales, en los que se concretan y marcan actuaciones para los planes de formación que se llevan a cabo por medio del Sistema Educativo, cada uno de los materiales que contribuyen al diseño y puesta en práctica de un determinado proyecto curricular expresan una concreción de los objetivos, de la organización del contenido, de los métodos y recursos para trabajar en el aula y de los medios e instrumentos para la evaluación.

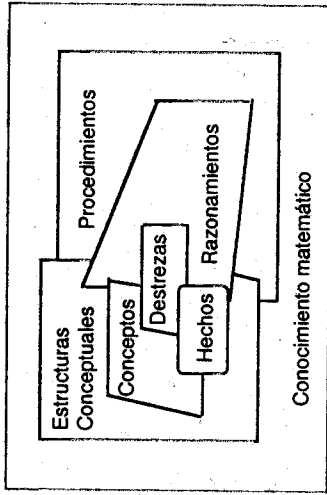
7. OBJETIVOS DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

A la hora de interpretar los objetivos que establecen los documentos curriculares para el Área de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria es conveniente recordar el carácter formativo general y la obligatoriedad de esta etapa educativa.

La enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades siguientes:

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.
2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, las distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias en función del análisis.
5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.
6. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de ser explicada desde puntos de vista contrapuestos y complementarios: determinista/ aleatorio, finito/ infinito, exacta/o aproximadamente, etcétera.
7. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.
8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.

Esquemáticamente expresamos así nuestra consideración del conocimiento matemático:



En el cuadro se indican las relaciones de inclusión entre los diferentes niveles de cada uno de los campos y las conexiones entre ellos. En este cuadro no está incluido el conocimiento actitudinal, ni tampoco las capacidades metacognitivas.

En cada uno de los niveles anteriores se pueden distinguir varios tipos, que pasamos a presentar brevemente.

1. Hechos. Se distinguen cuatro tipos de hechos: términos, notaciones, convenios y resultados.

Términos: son las denominaciones o vocablos con los que designamos los conceptos o las relaciones entre conceptos. En matemáticas hay términos específicos y otros que proceden del lenguaje común.

Notaciones: son los signos y símbolos empleados en matemáticas para expresar una idea de modo breve y preciso.

Convenios: son acuerdos tácitos o consensuados para comunicar información sin ambigüedad, evitando largas explicaciones.

Resultados: son unidades de información producto directo e inmediato de relaciones entre términos, susceptibles de memorizar, cuyo dominio y control conviene disponer para trabajar en matemáticas sin tener que partir siempre de cero.

2. Técnicas y Destrezas. Las técnicas y destrezas suponen el dominio de los hechos y de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. Distinguimos las destrezas según el campo de las matemáticas escolares en el que operan, y las clasificamos en: aritméticas, métricas, geométricas, gráficas y de representación.

Destrezas Aritméticas: son aquellas necesarias para un correcto dominio del sistema decimal de numeración y de las cuatro operaciones básicas. Entre las más destacadas podemos señalar la lectura y escritura de números, el cálculo mental con dígitos y algunos números de dos cifras, el cálculo con papel y lápiz, y el empleo de la calculadora.

Destrezas Métricas: son las destrezas necesarias para emplear correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie; también se incluye aquí el dominio del sistema métrico decimal.

Destrezas Geométricas: comprenden las rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano; también se incluye el dominio y empleo correcto de determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos.

Destrezas Gráficas y de Representación: el uso de modelos gráficos no está limitado a la representación de conceptos geométricos; cuando se hace una representación lineal de los números, cuando se emplea una gráfica para expresar una relación entre dos variables, o cuando se simboliza una fracción sobre una figura, se están utilizando destrezas de tipo gráfico, que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o relación.

3. Conceptos. Consideramos los conceptos como una serie de unidades de información (hechos) conectados entre sí mediante una multiplicidad de relaciones. El concepto lo constituyen tanto los hechos como sus relaciones y se representan mediante sistemas simbólicos y gráficos. Usualmente todo concepto admite una o varias representaciones de carácter gráfico o simbólico. Cada concepto se caracteriza por la mayor o menor complejidad de relaciones que se pueden establecer entre los hechos cuya regularidad expresa que, a su vez, va a permitir establecer nuevas relaciones con otros conceptos.

4. Razonamiento. La capacidad para establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituyen un concepto se expresa mediante una secuencia argumental a la que solemos llamar razonamiento. El razonamiento es la forma usual de procesar conceptos, es decir, de derivar unos conceptos de otros o implicar una nueva relación sobre la base de las relaciones ya establecidas. El *razonamiento lógico-deductivo* se ha considerado como la forma de razonamiento matemático preferente, lo cual no deja de ser una simplificación. En matemáticas, además del razonamiento deductivo, se emplean el *razonamiento inductivo* y el *razonamiento analógico*. En cualquiera de los razonamientos se utilizan destrezas de diferentes clases. Cuando un determinado razonamiento se ejecuta con unas pautas de rigor, precisión, concisión y elegancia se estandariza con alguna denominación especial: prueba, teorema, etc. En el trabajo con alumnos de la Educación Obligatoria, un razonamiento será todo argumento suficientemente fundado que dé razón o justifique una propiedad o relación. Las capacidades de expresión y comunicación de los alumnos las consideramos como una parte importante de su capacidad de razonamiento.

5. Estructuras conceptuales. Los conceptos, a su vez, no constituyen unidades aisladas de información; entre ellos se puede establecer una gran riqueza de relaciones que forman auténticas redes conceptuales. Las relaciones entre conceptos dan lugar a nuevas estructuras, en las que cada uno de los conceptos que la forman queda caracterizado por las relaciones que mantiene con el resto. Las

considerable de documentos mediante los cuales se puede obtener información diversificada y detallada sobre diferentes aproximaciones a los contenidos del currículo de matemáticas.

Pero mientras llega el momento en que la comunidad de educadores matemáticos asuma la plenitud de su responsabilidad, en que se esfuerce por establecer con precisión sus necesidades profesionales y delimite las componentes básicas formativas que dan satisfacción a esas necesidades, el momento en que se exija de las instituciones universitarias que atiendan adecuadamente a tales necesidades formativas poniendo a su servicio las estructuras académicas adecuadas, mientras llega ese momento, no podemos limitar nuestro trabajo a la denuncia, la queja o la autocompasión. Hay que reflexionar y elaborar propuestas concretas que faciliten las tareas del profesor y mejoren sus conocimientos didácticos.

Este es un objetivo de este libro: aportar una reflexión sistemática para el profesor de matemáticas, bien fundada y eficaz para la organización de sus actividades de planificación y diseño de unidades didácticas. Por ello hemos dedicado un capítulo independiente a cada uno de los organizadores mencionados y hemos reservado el último capítulo a ejemplificar cómo se movilizan los diferentes organizadores en el diseño de un tópico matemático concreto.

7. PROPUESTA DE ORGANIZADORES PARA EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

Desde un planteamiento más convencional más variadas son las informaciones y datos que se deben tener en cuenta cuando se inicia la planificación de cada una de las unidades didácticas. Por ello, además de los organizadores que hemos mencionado, vamos a considerar otros datos e informaciones, necesarios para dicha planificación, y vamos a realizar una primera descripción de cada uno de los organizadores.

Una primera información, que actúa como organizador para cada unidad didáctica, es la **ubicación y tratamiento** de cada uno de los tópicos que se consideran en el Currículo del Ministerio y en el de la correspondiente Comunidad Autónoma en la que cada profesor se encuentre trabajando. Con esta información se trata, obviamente, de situar cada uno de los temas o unidades dentro de la legislación editada por el Ministerio y las correspondientes Consejerías de Educación autonómicas.

En cada caso hay que disponer de los Reales Decretos y de los Decretos publicados en el Boletín Oficial del Estado sobre el Currículo de Secundaria; igualmente de los decretos de los Boletines Oficiales autonómicos. La organización de cada tema o unidad debe realizarse, prioritariamente, en relación con estos documentos. En segundo término se podrán citar otras fuentes documentales.

Un segundo organizador debe presentar detalladamente la **estructura de los contenidos** de cada uno de los temas, teniendo en cuenta la organización cognitiva de los conocimientos matemáticos que ha adoptado el Currículo de Mate-

máticas. Se trata de la organización de los contenidos matemáticos de cada una de las unidades mediante su clasificación en conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes. El tratamiento que realiza el Real Decreto 1345/1991 ha de servir de referencia, pero no puede adoptarse como esquema rígido e inamovible sino que debe analizarse y tratar de ampliarse y enriquecerse, ya que las perspectivas y prioridades no se encuentran agotadas por la propuesta ministerial o autonómica.

Un tercer organizador lo proporciona el **análisis fenomenológico** de los conocimientos matemáticos. La aproximación que ofrece la fenomenología didáctica de los conocimientos realiza un balance de aquellos fenómenos para cuya comprensión y dominio se elaboraron los correspondientes conocimientos matemáticos. Por ello conviene conocer cuáles son los fenómenos que están en la base de los contenidos tratados en cada una de las unidades. Las situaciones en las que se presentan y emplean los diferentes conceptos y procedimientos y las funciones que en cada caso se destacan, constituyen una dimensión importante para el análisis y tratamiento didáctico del conocimiento matemático, como ya puso Freudenthal de manifiesto.

Un profesor que trabaje la multiplicación utilizando sólo las tablas de multiplicar de los números pares estaría dando una información incompleta y proporcionando una formación deficiente a sus alumnos. Cuando un profesor utiliza sólo determinados contextos y situaciones para mostrar las bases y aplicaciones del conocimiento matemático, deja un campo de fenómenos sin explorar y, por tanto, ofrece a sus alumnos, igualmente, una información incompleta y deficiente.

Las necesarias conexiones con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento, las diferentes utilidades que se hacen de los conocimientos matemáticos, son otros tantos fenómenos que conviene considerar en el momento de seleccionar y organizar los contenidos y de diseñar las secuencias metodológicas, ejemplos, motivaciones y materiales para su transmisión.

El cuarto organizador se refiere a los aspectos visuales y simbólicos del conocimiento matemático y de su aprendizaje. A esta fuente de información la hemos denominado **modelos y representaciones**.

La noción de representación hace referencia al modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico. Mediante las representaciones las personas organizan su información sobre un concepto u operación para poder pensar sobre ellos, expresar su comprensión, y utilizarla en situaciones y problemas prácticos o en situaciones escolares convencionales. Los modelos sirven para la presentación y desarrollo de un determinado concepto; también las representaciones matemáticas se utilizan para modelizar fenómenos naturales o sociales.

Un quinto organizador, que hemos denominado **errores y dificultades**, tiene por finalidad poner en conocimiento del profesor los resultados de las investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes. Uno de

los datos que surgen en estos estudios son los errores de los alumnos, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales.

También se observa que hay determinados conocimientos que lleva más tiempo comprender o en los que hay un mayor número de alumnos que no comprenden correctamente; estos conocimientos son los que consideramos difíciles o de mayor dificultad. Al realizar la programación de un tema el Profesor debe disponer de información sobre cuáles son aquellos puntos que van a tener una dificultad especial, así como aquellos errores o conocimientos insuficientes que sus alumnos pueden encontrar. No sólo es necesaria esa información sino que también el profesor debe saber cómo diagnosticar los errores de sus alumnos y qué tratamiento debe seguir con ellos para remediar sus deficiencias. Aunque no es mucho lo que se sabe sobre técnicas correctivas, sí es conveniente disponer de información ya contrastada.

Los materiales y recursos constituyen el séptimo organizador. Los materiales son concreciones de modelos realizadas por casas comerciales o por el profesor. Así, las reglas de Cuisenaire son una concreción del modelo con medidas para el aprendizaje de los números naturales, pero no es la única concreción de ese modelo. Los recursos proporcionan situaciones, o ayudas para trabajar en una situación, en las que el concepto estudiado se emplea significativamente y permite desarrollar algunos procedimientos. La noción de recurso es más amplia e imprecisa, ayuda a evocar el concepto y a trabajar sobre él empleándolo en situaciones prácticas. Dentro de los recursos actuales encontramos los materiales derivados de las nuevas tecnologías de los que conviene hacer mención explícita cada vez que resulte adecuado.

El séptimo organizador tiene por finalidad señalar algunos momentos a lo largo de la historia de la matemática en los que el conocimiento matemático considerado tuvo un desarrollo especial o desempeñó algún papel de interés. Hemos denominado desarrollo histórico del tópico a este organizador. La información histórica puede servir en la programación para motivaciones, ejemplos y también para proponer algún ejercicio curioso. Los alumnos se sienten especialmente interesados cuando se les proporciona información adecuada sobre historia de las matemáticas y los antecedentes de un contenido. Se trata de poner el énfasis en la dimensión cultural e histórica del conocimiento matemático, pero no se pretende hacer un estudio exhaustivo y completo de la evolución histórica de cada uno de los tópicos. La revisión de algunas dificultades históricas en la construcción de un determinado concepto puede servir de aliado a los estudiantes para superar ellos mismos tales limitaciones.

Finalmente, hay un octavo organizador ineludible en toda programación, que consiste en la elaboración de una bibliografía básica para cada uno de los temas que se esté considerando. Esta bibliografía debe recoger los documentos más significativos por cada uno de los apartados anteriores y debe ofrecer ejemplos de unidades didácticas sobre el tópico que se esté tratando, elaboradas con anterioridad por los profesores del seminario. Disponer de documentos de referencia y de propuestas construidas por los propios profesores no es una tarea trivial ya que proporciona un soporte físico a la totalidad de reflexiones que se

realizan, dando oportunidad a la crítica y a la revisión de las ideas trabajadas. En tanto no entre en la cultura de los profesores la realización y conservación de documentos relativos a la planificación de unidades didácticas no será posible dar objetividad, peso y continuidad a estas actividades.

En los capítulos que siguen se tratan con mayor detalle los principales organizadores considerados, es decir, del tercero al séptimo. El segundo organizador ya se presentó en el capítulo anterior. Mientras que el primer organizador y el último contextualizan el marco general en que se sitúa cada unidad didáctica y el estado de su concreción, respectivamente.

8. ORGANIZADORES Y COMPONENTES DEL CURRÍCULO

Hemos comenzado este capítulo poniendo en cuestión la utilidad de la información que ofrecen los documentos oficiales sobre las cuatro componentes del currículo (objetivos, contenidos, metodología y evaluación) para la elaboración de unidades didácticas. Las deficiencias detectadas para el análisis y construcción de unidades didácticas con el esquema que proporcionan estas componentes nos llevaron a elaborar la noción de organizador y a profundizar en ella. Tomando como referencia las aportaciones que hacen cada uno de los organizadores sostenemos que es posible un análisis didáctico en profundidad de los distintos temas del currículo de matemáticas. Aunque no hemos entrado todavía en tal análisis con detalle, los organizadores se han escogido para satisfacer esta demanda.

Pero los organizadores ya proporcionan un primer resultado: obtenida la información más relevante sobre cada tópico, en relación con los diferentes organizadores, es posible establecer criterios precisos mediante los cuales estructurar la información disponible y organizar un diseño de las unidades didácticas según el esquema general de las cuatro componentes del currículo.

Analicemos estas relaciones.

La información que se obtiene a partir del análisis fenomenológico de un campo o estructura matemática ofrece orientaciones para organizar los contenidos correspondientes a los temas de ese campo; también ofrece criterios para establecer objetivos de aprendizaje, al conectar cada campo matemático con un conjunto de contextos y aplicaciones en los que tales estructuras toman significado. Igualmente, al permitir la selección de situaciones sobre las que ejemplificar determinadas nociones o iniciar su presentación, el análisis fenomenológico aporta directrices para el tratamiento metodológico de cada tema. Finalmente, la valoración del aprendizaje deberá tener en cuenta los contextos en los que los contenidos adquieren significado, y esta interpretación viene dada por el análisis fenomenológico.

El estudio de los errores y dificultades también proporciona esquemas con los que organizar los contenidos, en cuanto que una determinada secuenciación facilita la superación de dificultades específicas; proporciona criterios para establecer objetivos, en cuanto marca los errores prioritarios que deben evitarse y

Tomaremos como contenido matemático el lenguaje algebraico y a él nos remitiremos para ilustrar de manera concreta las cuestiones que se van plantando a lo largo del capítulo.

El propósito de este capítulo es hacer una reflexión general sobre este tema central en el aprendizaje de las matemáticas y poner en contacto al lector con los aspectos más relevantes en torno a las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos en la construcción del conocimiento matemático. Para ello, analizaremos el origen de estas dificultades, la noción de obstáculo y los diferentes errores que cometen los alumnos al trabajar con las matemáticas; también comentaremos las razones por las que se origina.

Al conocer de manera general o específica estas razones, podemos propiciar una enseñanza adecuada y facilitar un mejor aprendizaje de las matemáticas.

2. DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con las matemáticas. En general, algunos alumnos, casi siempre, y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las matemáticas.

Estas dificultades que se dan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son de naturaleza diferente y se pueden abordar, obviamente, desde perspectivas distintas.

Aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, éstas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos de pensamiento), la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y una quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas.

De manera más explícita estas dificultades se pueden organizar, en líneas generales en los siguientes tópicos:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Parece necesaria una reflexión más detallada de cada uno de estos tópicos para situarnos mejor en la naturaleza de estas dificultades.

2.1 Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas

La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos.

Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Uno de estos conflictos nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. El significado puede ser comunicado por alusión o asociación. Sin embargo, el lenguaje de las matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos. Este conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión.

Otro problema del lenguaje en matemáticas es el originado por el vocabulario común. Palabras como, por ejemplo, raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, semejante, índice, función, etc., tienen significados diferentes en matemáticas y en el lenguaje habitual, de modo que el uso de tales palabras puede producir dificultades a causa de la confusión semántica implicada.

Hay también algunas palabras usadas en ciertos contextos que pueden ocasionar confusiones de conceptos y que, probablemente, podrían ser evitadas, particularmente, cuando se emplean connotaciones del lenguaje diario para atraer la atención sobre un signo. Se puede oscurecer así su significado más que destacar el concepto subyacente; por ejemplo, "añadir un cero" en la multiplicación por 10, "reducir una fracción" o "reducir una expresión algebraica" en la simplificación, que connota hacerla más pequeña, identificar una letra con un significado algebraico como una determinada "fruta" ($3x+2y$, igual a tres peras más dos manzanas)...

Igualmente en relación con los conceptos, tenemos palabras específicamente matemáticas, por ejemplo, hipotenusa, paralelogramo, coeficiente, isósceles, divisor, múltiplo, etc., que por ser poco familiares y frecuentemente mal entendidas, suelen presentar al alumno considerables dificultades, al encontrarse con ellas únicamente en sus lecciones de matemáticas.

Las palabras de igual significado en la lengua común y en matemáticas tienen su principal problema en saber que, en efecto, el significado es el mismo. A veces, los alumnos pueden pensar que una palabra de lenguaje habitual, toma un significado distinto y a veces "misterioso", cuando se emplea en matemáticas. Pertenecen estas dificultades a otro dominio del lenguaje matemático que es la Pragmática y se refiere al estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el que se enuncia. Hay una infinidad de cuestionamientos por parte de los alumnos en función de que la palabra se encuentre en un