

"L'APRENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES A L'EDUCACIÓ INFANTIL I PRIMÀRIA: COM PODEM AJUDAR A DESENVOLUPAR LES CAPACITATS DELS NOSTRES INFANTS."



Jordi Deulofeu

**Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona**

1. Introducció

Aquesta conferència, que forma part d'un curs sobre l'ensenyament de les matemàtiques a l'educació infantil i primària, pretén analitzar el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques a les primeres edats de l'educació obligatòria, prenent com a referència els aspectes més significatius de l'aprenentatge. L'anàlisi de l'ensenyament d'una disciplina es pot fer centrant-se en diversos àmbits (del currículum oficial a la realitat de l'aula) i des de diversos punts de vista (cultural, sociològic, psicològic, pedagògic). Cadascun d'aquests àmbits pot fer aportacions rellevants que ens guiaran cap a una millora del procés; en concret, des de la nostra perspectiva, la de l'aprenentatge, ens caldrà fer referència tant a una determinada concepció sobre què són les matemàtiques i quin pot ser el seu paper en l'educació dels infants, com també als coneixements que tenim sobre com s'aprèn i, especialment, com es pot aplicar aquest coneixement al cas concret de les matemàtiques.

Després d'una breu referència a les matemàtiques i de caracteritzar-ne la meua concepció, recordaré breument alguns corrents psicològics que han influït en el seu ensenyament durant la segona meitat del segle XX, fins arribar al constructivisme, marc de referència del currículum actual i de la nostra concepció sobre l'aprenentatge. En particular analitzaré les implicacions que el constructivisme té per a l'ensenyament de les matemàtiques i quines pautes ens assenyala per desenvolupar aquest ensenyament.

Parlaré del currículum i la seva vigència, més de deu anys després de la seva publicació, i especialment la seva implementació, on, al meu entendre, es plantegen realment els problemes d'aprenentatge. En aquest nivell hi ha dos punts centrals: la formulació i seqüenciació d'activitats d'aprenentatge i la gestió d'aquestes activitats. En efecte, considero que un element clau en el procés d'ensenyament el constitueixen les activitats d'aprenentatge, i per això, una part important de la conferència tractarà, a partir d'exemples concrets, sobre quin tipus d'activitats poden ser les més adequades, quines són les fonts principals per al disseny d'activitats, quin hauria de ser el paper de la resolució de problemes i com una determinada gestió del treball a l'aula pot oferir als nostres infants oportunitats reals d'aprenentatge.

Per altra part, no podem oblidar que el llenguatge és un aspecte clau en l'aprenentatge i té un paper molt important quan ensenyem matemàtiques. Per això, em referiré a la problemàtica dels llenguatges en matemàtiques, a la importància de parlar i escriure de i sobre matemàtiques i als significats dels símbols que utilitzem. Tampoc podem passar per alt la relació entre el pensament informal i el pensament formal, és a dir, als ponts que cal ajudar a construir per relacionar les idees i realitzacions dels alumnes quan fan matemàtiques amb la seva estructuració i formalització.

L'ensenyament dels conceptes matemàtics implica necessàriament un procés d'abstracció. Cal partir del concret, dels fenòmens i de les situacions properes als alumnes per començar a construir conceptes i relacions. Ara bé, hi ha moltes situacions (i molts materials) diferents que poden servir per realitzar aquest pas a l'abstracció; algunes d'elles són situacions naturals que formen part de la vida quotidiana (per exemple, el sistema de monedes, el calendari, els jocs tradicionals) mentre altres són construïdes amb la intenció de treballar un contingut (per exemple, materials estructurats com els antics multibase o els blocs lògics, o materials polivalents, com el multi-link o el Polidron). Cadascun d'aquests tipus de materials tenen el seu paper en el procés d'aprenentatge.

Finalment, no puc oblidar que, de la mateixa manera que els infants són els protagonistes de l'aprenentatge, els mestres són la peça clau de l'ensenyament, més enllà del que puguin recomanar els experts o l'administració educativa. Per tant, aquesta conferència, a banda de proporcionar una determinada informació i una visió concreta de la situació actual, té com a finalitat última provocar una reflexió en cadascú de vosaltres sobre les vostres pràctiques educatives concretes quan ensenyeu matemàtiques; per això, m'atreveixo a demanar-vos que contrasteu les vostres concepcions amb les que jo exposaré i les vostres pràctiques quotidianes amb les propostes que, a tall d'exemple, utilitzaré en la meva exposició.

2. Una determinada concepció sobre les matemàtiques

És possible caracteritzar les matemàtiques pels seus "objectes": tracten dels nombres i les seves relacions, de les formes del pla i de l'espai, de la mesura, de l'atzar, etc., però això ens explica molt poc sobre la seva importància, sobre la necessitat de la seva presència en l'ensenyament obligatori o sobre els tipus de treball que

desenvolupen els matemàtics. Considero més interessant fixar-se en altres característiques, com són la seva utilitat, les formes de raonament que li són pròpies, el fet que constitueixen una activitat humana, i la seva presència en la història de la cultura. Aquests quatre punts permeten, al meu entendre, dibuixar una determinada concepció sobre què són les matemàtiques, a partir de la qual és possible justificar la seva presència en l'ensenyament obligatori, al mateix temps que ens dóna "pistes" sobre allò que és important de treballar.

No és cap novetat constatar que si les matemàtiques tenen una presència important en l'ensenyament obligatori és d'una banda per la seva utilitat i de l'altra per la seva contribució al desenvolupament del raonament. Moltes vegades, aquests dos aspectes s'han vist contraposats (sovint es parla d'unes matemàtiques "útils" i d'unes altres "per pensar"), però fa molts anys que Pere Puig Adam (1901-1960), un dels professors de matemàtiques més insignes del nostre país, ja deia que aquests dos aspectes no només eren compatibles sinó que, en realitat, eren complementaris: el primer ens ha de guiar en la selecció dels continguts (què ensenyar), mentre el segon ha de servir-nos per a la metodologia (com ensenyar).

Ara bé, la paraula útil es pot interpretar de manera molt restringida, pensant en allò immediat (per exemple, cal conèixer els nombres, les operacions elementals i el funcionament del sistema monetari per tal que no ens "enganyin" quan ens tornen el canvi), o bé d'una manera més àmplia: les matemàtiques són importants per a la formació d'un ciutadà perquè constitueixen un poderós instrument d'anàlisi de la realitat, sense el qual la comprensió del món, així com la capacitat de crítica i d'intervenció en ell, queden molt limitades.

En el món d'avui cal tenir uns coneixements matemàtics bàsics per entendre moltes de les informacions que rebem; n'hi ha prou de llegir un diari o escoltar un noticiari, un dia qualsevol, per adonar-se d'aquest fet. I això és així perquè la majoria de les àrees del coneixement utilitzen les matemàtiques, no només en aspectes molt especialitzats, sinó també en la comunicació d'aspectes quotidians. Vegem-ne un exemple: el passat mes de juliol a la Vall Cardós -Pallars Sobirà-, van caure, en tres dies, 400 litres/m². Aquesta quantitat és molt important? Podem fer-nos una idea del volum d'aigua, o bé ens cal fer una simulació i tirar 400 ampolles d'un litre en un recipient? Dit d'una altra manera, si es va recollir l'aigua en un recipient, sabem imaginar-nos quina alçada va pujar? Sens dubte, resoldre aquesta qüestió ens portarà a fer diversos canvis d'unitats

i requerirà conèixer com es determina el volum del recipient, però el més important és que ens ajudarà a comprendre millor la informació que ens han donat.

És clar que aquesta característica d'utilitat no és exclusiva de les matemàtiques, ja que la resta de les disciplines, amb major o menor mesura, la comparteixen (de fet, moltes d'elles utilitzen el llenguatge de les matemàtiques) però, tanmateix, hi ha una característica que considero important: quan pensem en l'ús de les matemàtiques en el món d'avui, és cert que moltes de les seves aplicacions són d'un alt nivell de sofisticació, però si mirem enrere, en la història de la humanitat, veurem que les matemàtiques són una de les primeres ciències que va existir (es considera que fou la primera, juntament amb l'astronomia), la qual cosa ens indica que la seva necessitat apareix molt aviat, per donar resposta a qüestions primàries i per a resoldre problemes força elementals.

Pel que fa a la relació entre matemàtiques i raonament, és cert que les matemàtiques són principalment una ciència deductiva i d'acord amb això, tots els resultats demostrats segueixen essent vàlids avui, a diferència del que succeeix amb les ciències experimentals. Però també és cert que abans de demostrar un cert resultat cal intuir-lo o descobrir-lo, i per això cal observar, experimentar, relacionar, és a dir, treballar inductivament, analitzant casos particulars abans de fer generalitzacions. Per això, i especialment en els primers nivells, les matemàtiques són essencialment inductives i el seu treball és similar al de les altres ciències; les demostracions formals no hi tenen lloc, la qual cosa no vol dir que no s'hagi, o no es pugui reflexionar i discutir sobre els resultats obtinguts, i s'intenti argumentar la seva validesa a partir del raonament lògic.

Hem assenyalat també que les matemàtiques són una activitat humana, i en la conferència que m'ha precedit, en Claudi Alsina n'ha proposat nombrosos exemples. Els infants han de poder gaudir fent matemàtiques, encara que a vegades els suposi un esforç i es presentin dificultats. Això vol dir, entre altres coses, que si volem que els nostres infants s'interessin per les matemàtiques, s'ho passin bé amb elles i tinguin un esperit de curiositat i d'interrogació, és imprescindible que nosaltres, els mestres, tinguem aquest mateix esperit, és a dir, que trobem sentit a tot allò que fem i que proposem per fer als infants, que ens sentim encuriósits pels problemes que se'ns presenten i, en definitiva, que continuem mantenint sempre les ganes per aprendre.

D'altra banda, Alan Bishop, en el seu llibre *Enculturación matemática*, assenyala que en totes les civilitzacions es poden trobar diverses activitats directament relacionades amb les matemàtiques. Comptar, mesurar, localitzar, dissenyar, jugar i comunicar-se són les sis activitats que Bishop ha identificat a partir de nombrosos estudis antropològics. La relació amb les matemàtiques de les dues primeres és prou evident; menys clara resulta la relació amb les dues següents, i potser per això ens costa més concretar el paper de la geometria en l'ensenyament primari, però voldria parar-me un moment per comentar les dues últimes.

El joc és una activitat present en totes les cultures i no només en el món dels infants; tots sabem que el joc constitueix un recurs important per a l'aprenentatge en les primeres edats, però Bishop ens recorda que és molt més que un recurs, és una activitat present en totes les cultures, i en dir això es refereix no només al món dels infants sinó al dels adults. Moltes de les característiques del joc estan relacionades amb les matemàtiques, no només per la seva relació amb continguts numèrics, geomètrics o de l'atzar, sinó particularment, pel que fa al paral·lelisme que es pot establir entre l'entorn que genera la pràctica d'un joc (regles, què es pot fer i què no, objectius del joc, etc.) i la manera de fer en matemàtiques, així com també per la relació entre les estratègies emprades en la pràctica dels jocs i les pròpies de la resolució de problemes (pensem, per exemple, amb els anomenats jocs de taula).

Pel que fa a la comunicació, és clar que el desenvolupament del llenguatge és una característica dels humans i que sabem que hi ha un lligam entre les capacitats cognitives i les lingüístiques, però també cal tenir en compte que les matemàtiques han desenvolupat uns llenguatges característics que serveixen tant per fer matemàtiques com per comunicar-les als altres, en definitiva, per poder compartir allò que fem.

Per resumir, i d'acord amb els quatre aspectes que he exposat, entenc l'educació matemàtica com un procés d'immersió en les formes pròpies de procedir en matemàtiques, que consisteixen en una manera peculiar d'exploració de la realitat. Així, per fer realment matemàtiques caldrà partir de situacions problemàtiques, d'interrogants que sorgeixen de la curiositat sobre el que ens envolta i treballar per tal d'interpretar-los.

3. Consideracions sobre l'aprenentatge de les matemàtiques: una mica d'història.

Abans de centrar-nos en el marc psicològic de referència actual, em sembla convenient recordar, breument, com hem arribat fins als nostres dies pel que fa a la relació entre aprenentatge i ensenyament de les matemàtiques.

Fa quaranta anys, caracteritzar en què consistia, a grans trets, l'ensenyament de les matemàtiques a l'escola primària era força senzill: els nens i les nenes havien de conèixer els nombres, saber comptar i realitzar les quatre operacions bàsiques seguint estrictament els algorismes de llapis i paper, introduïts a occident ara fa exactament 800 anys per Fibonacci en el seu *Liber Abaci*. Encara que també es resolien alguns problemes aritmètics escolars i s'aprenien a fer mecànicament els canvis de mesura, el cert és que per superar l'ingrés de batxillerat, als deu anys, el que calia era saber fer una divisió per dues xifres.

En aquell marc, clarament influït pels corrents conductistes, la importància de les rutines i la prevalència dels aspectes sintàctics sobre els semàntics era quasi total; l'aprenentatge entès com a ensinistrament portava al disseny de seqüències rígides, ben delimitades i perfectament graduades, que calia repetir una i altra vegada; també s'entenia que per assolir un objectiu general calia desglossar-lo en suma de particulars. És clar que ja en aquells temps hi havia qui pensava que el càlcul mental era molt important (recordem els treballs d'Alexandre Galí), que per resoldre un problema primer calia entendre'l i que els problemes s'havien d'extreure de situacions reals, però crec que podem afirmar que, tot i el valor d'aquests treballs, eren autèntiques excepcions.

Potser encara hi ha qui pensi que, pel que fa a les matemàtiques a l'escola, les coses no han canviat gaire i que, per tant, aquells objectius segueixen essent, a grans trets, els mateixos en el món actual. Però crec que avui es pot afirmar que això no és així de cap manera. Les coses ja començaren a canviar al nostre país cap als anys setanta, amb l'arribada de l'anomenada "matemàtica moderna", que coincidí amb la implantació de l'EGB i que portà les idees dels corrents estructuralista i formatiu (principalment de Bruner i Piaget). Bàsicament es pretenia una aproximació conceptual i comprensiva de les matemàtiques, que volia, principalment, provocar la transparència d'allò que es feia. Es donava gran importància a les estructures matemàtiques i a la seva relació

amb les estructures cognitives, destacant les estructures generals existents en el particular. Per això sorgí amb força la utilització del material estructurat (Dienes), però també l'activitat-descobriments i la necessitat d'un currículum en espiral.

Inicialment, aquest canvi suposava un pas endavant, principalment perquè es tenia en compte com es desenvolupava l'aprenentatge dels alumnes, i la importància de la seva activitat; però aviat es constatà que la contraposició entre els aspectes operatius i el rigor lògic, l'èmfasi en la fonamentació, l'abandonament de la geometria i les concrecions allunyades de la realitat dels alumnes, juntament amb una concepció formalista de les matemàtiques, esdevenien obstacles insalvables, tal com destacaren ja als anys setanta, entre d'altres, Morris Kline i Hans Freudenthal (la materialització de les estructures no és suficient: cal partir dels fenòmens i tractar d'organitzar-los. En aquest sentit, la resolució de problemes i el treball a partir de situacions contextualitzades, és un aspecte fonamental).

A partir dels anys vuitanta, principalment als Estats Units, el paper de la resolució de problemes i els primers plantejaments sobre les noves tecnologies (que s'inicien amb la calculadora i posteriorment amb l'arribada dels ordinadors) esdevenen els elements de discussió i innovació més importants que, poc a poc, comencen a ser coneguts al nostre país. Això coincideix amb el canvi del sistema educatiu per tractar d'adaptar-se a una nova societat, la qual cosa marca els anys noranta al nostre país. És en aquest escenari on, al meu entendre, cal situar el nou marc psicològic de referència que és el que es contempla en l'actual currículum de l'ensenyament obligatori.

4. L'enfocament constructivista

No pretenc exposar amb detall què entenem per constructivisme, tan sols recordar que aquesta paraula fa referència a la convergència entre l'aprenentatge escolar entès com un procés de construcció del coneixement i l'ensenyament com una ajuda a aquest procés de construcció.

És cert que es poden introduir molts matisos i precisions al que acabem de dir, en particular quan considerem com es realitza aquesta construcció dels coneixements, la qual cosa ens portarà a interpretar de manera diferent què entenem per constructivisme (pensem, per exemple, en la importància que donem a l'aspecte

individual o al social, o bé a la relació entre l'àmbit cognitiu i l'afectiu) però el que m'interessa en aquest punt és, d'una banda, la relació amb el coneixement matemàtic i, de l'altra, les conseqüències que l'acceptació d'aquest marc tenen en la nostra actuació com a mestres.

Pel que fa al primer punt, és interessant observar que hi ha un cert paral·lelisme entre un enfocament constructivista i una concepció de les matemàtiques com la que he exposat anteriorment, relació que, curiosament, també podem trobar quan analitzem altres marcs psicològics i altres concepcions sobre les matemàtiques, que han estat vigents en el passat. Entenc que aquest paral·lelisme té relació amb la importància que es dóna, d'una banda, als significats (en aquest cas al coneixement matemàtic i a la seva utilització) i, de l'altra, al fet de considerar la seva construcció com una activitat humana immersa en una cultura determinada.

En relació amb el segon punt, és evident que si acceptem el marc constructivista, la nostra actuació com a mestres ha d'estar guiada per la funció d'ajuda al procés de construcció del coneixement, i aquest és un aspecte que considero de la màxima importància, perquè canvia radicalment la nostra feina com a mestres. No es tracta d'entendre el paper del mestre com el d'aquella persona que transmet els coneixements als seus alumnes per mitjà d'explicacions clares i precises, sinó com el d'un mediador que guia l'aprenentatge, que dissenya entorns i activitats per tal que els alumnes trobin oportunitats per construir els seus coneixements i anar-los integrant, i com a gestor i regulador de tot el procés d'aprenentatge.

Així, d'acord amb els principis generals del constructivisme, entenc que el mestre, en la seva tasca de planificació i de desenvolupament del procés d'ensenyament-aprenentatge, cal que s'ocupi principalment de:

- a) Donar significat (semantitzar) als continguts i als problemes de bon començament.
- b) Proporcionar models alternatius de representació dels objectes matemàtics.
- c) Seqüenciar les activitats per tal que siguin un suport real al procés constructiu del coneixement matemàtic.
- d) Promoure situacions d'aprenentatge que possibilitin la interacció entre mestre i alumne, i entre iguals.

e) Interpretar i utilitzar els errors com a expressió d'una determinada competència de la qual cal partir i amb què cal comptar, i preguntar-se per la seva coherència.

f) Utilitzar l'avaluació com a eina al servei de l'aprenentatge.

Cadascun dels punts anteriors mereixen ser comentats, precisats i exemplificats, cosa que intentaré fer a mesura que vagi tractant els diferents aspectes que cal tenir en compte en relació amb l'aprenentatge de les matemàtiques. Tan sols vull apuntar que cal creure en les potencialitats dels infants per construir les matemàtiques, guiats i ajudats pels mestres, la qual cosa significa que cal donar-los oportunitats per desenvolupar els diferents aspectes que trobem en una tasca escolar, des de la seva organització fins a la seva realització; en definitiva, cal regular el procés de cessió de la responsabilitat, donant als alumnes oportunitats en la presa de decisions i entenent els dubtes, les dificultats i els errors com a part indispensable del procés.

5. El paper de les activitats d'aprenentatge. Exemples

En el marc en què ens hem situat, les activitats d'aprenentatge tenen un paper clau, i entenc que la qüestió fonamental es refereix al tipus d'activitats que hem de plantejar als nostres alumnes per tal que les matemàtiques que es desenvolupen a classe es corresponguin, d'una banda, amb les finalitats del seu ensenyament i, de l'altra, siguin significatives per als infants. Per tal d'abordar la qüestió anterior, crec que cal considerar quines són les fonts que ens proporcionen bones activitats per treballar a la classe i, de manera complementària, com podem realitzar-ne una bona gestió.

Pel que fa a les fonts cal considerar, en primer lloc, aquelles situacions que ens proporciona l'entorn, la vida quotidiana, les informacions del món en què vivim i les altres ciències. En aquest camp cal distingir aquelles situacions que es presenten en un moment determinat, moltes vegades irrepètible, i que vénen motivades per alguna cosa que ha succeït en l'entorn immediat, d'aquelles altres que, tot i la seva proximitat, es presenten de manera regular.

Un exemple de les primeres ens el proporciona la introducció de l'euro, és a dir, el canvi de sistema monetari que s'ha produït recentment. L'ús de situacions que

involucren diners (situacions de compra-venda, de canvis de monedes, càlculs de petits pressupostos, etc.) són una font molt important per al treball amb nombres. És evident que la introducció d'una nova moneda produeix canvis diversos: fins ara treballàvem essencialment amb una única unitat (la pesseta) que no se subdividia (el temps dels rals i els cèntims ja havia passat), i, per tant, totes les monedes i bitllets eren múltiples d'aquella unitat. En canvi, amb l'arribada de l'euro treballarem amb dues unitats (l'euro i el cèntim) i expressem les quantitats en funció de totes dues, tal com ho faríem si mesuréssim longituds utilitzant metres i centímetres. Al mateix temps s'introdueix una manera de representar les quantitats utilitzant els nombres decimals (en lloc de 3 euros i 25 cèntims, escrivim 3,25 euros), i, per altra part, els nombres involucrats són més petits, pel fet que la unitat principal és més gran.

Ara bé, hem de ser conscients que les dificultats que trobem els adults pel fet de tenir totalment interioritzada l'antiga moneda (la qual cosa ens porta constantment a traduir d'euros a pessetes) té molt poc a veure amb les que trobaran els alumnes en la interiorització del nou sistema monetari, pel fet que la majoria no disposen de prou referències que els permetin dominar l'antic sistema. Per tant, les operacions de traducció tenen molt poc sentit a primària, i en canvi, d'acord amb el nou sistema, caldrà treballar l'ús combinat de les dues unitats lligades al sistema decimal de representació de les quantitats.

Pel que fa a la utilització de situacions quotidianes estables (en el sentit que no tenen un caràcter conjuntural i que, per tant, podem utilitzar-les en qualsevol moment) posaré un exemple relacionat amb la mesura del temps: el calendari. Tots vosaltres treballeu el calendari per tal d'aconseguir que els nens i les nenes el coneguin i l'utilitzin com a referència per situar-se en el temps. Ara bé, més enllà d'aquest coneixement estrictament útil, el calendari és una font inesgotable per plantejar situacions matemàtiques.

En efecte, pensant en el calendari, podem proposar des de petits problemes relatius a l'edat, les dates de naixement i la seva distribució al llarg de l'any (la Maria farà vuit anys el 9 d'abril i en Pau el 27 d'abril d'aquest any; qui és més gran? Quant temps es porten?), fins a situacions de major complexitat que possibiliten una reflexió sobre la pròpia estructura del calendari: per què el calendari, tant pel que fa a la seva estructura, com a la relació entre les diferents unitats que el componen (dia, setmana, mes, any), és "tan estrany"? Per què hi ha mesos de durada diferent? Per què no es manté l'alternança en els mesos entre 31 i 30 dies, la qual cosa faria que hi hagués sis

mesos amb 31 dies i no set? Per què és precisament el febrer l'únic que té menys de 30 dies? Els noms dels mesos ens poden ajudar a entendre algunes coses? Les respostes a aquestes, i a moltes altres qüestions que es poden plantejar, no només ens ajudaran a entendre millor l'estructura del nostre calendari, sinó que ens permetran veure'l com un producte de la cultura on es barregen aspectes científics amb d'altres, ben allunyats de les matemàtiques.

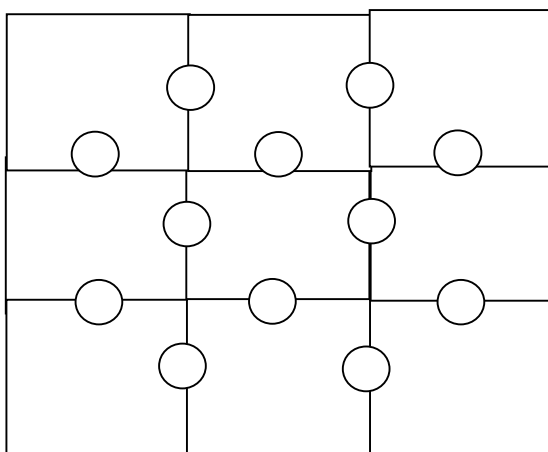
Si bé les situacions contextualitzades ens ofereixen moltes oportunitats per a l'elaboració d'activitats d'aprenentatge, les pròpies matemàtiques són una altra font a tenir en compte. En aquest cas, una formulació de les activitats on es posi de manifest la idea de repte, de descobriment i en moltes ocasions de joc, ens pot ajudar a plantejar problemes que tot i la manca de context concret, esdevinguin significatius per als nostres alumnes. Vegem-ne alguns exemples.

- a) La reflexió sobre el funcionament del sistema de numeració posicional decimal és molt important per a l'elaboració del sentit numèric. Més enllà del treball sistemàtic sobre la relació entre les successives unitats i sobre l'escriptura dels nombres, cal plantejar situacions-problema que de manera implícita propiciïn una reflexió sobre el valor de posició. Imagineu la següent situació: Es donen sis xifres diferents (per exemple, 1, 3, 4, 6, 7, 9) i amb totes elles hem de formar dos nombres, de tres xifres cadascun, de manera que quan els sumem el resultat sigui el més gran possible. Com formarem els dos nombres? Hi haurà més d'una solució? Una vegada determinades les solucions i la manera d'obtenir-les, es pot introduir una nova condició: A més a més de la suma volem que també el producte sigui màxim (en aquest cas la calculadora ens pot ajudar a veure què succeeix).

- b) Com he dit abans, els jocs poden ser també una bona font per fer matemàtiques. Si observeu els infants jugant al tres en ratlla (un dels primers jocs d'estratègia, és a dir, sense intervenció de l'atzar, que poden practicar els nostres alumnes) us adonareu que amb una mica de pràctica identifiquen que tres fitxes d'una mateix color formen tres en ratlla (estan alineades) quan la recta que determinen és horitzontal o vertical (en relació amb el tauler) però, en canvi, els costa molt més fer-ho si es tracta d'una diagonal. Aquesta dificultat és present en moltes situacions de tipus geomètric i té relació amb la posició de les fitxes: sembla clar que si tres fitxes estan alineades i girem tot el tauler (incloses les fitxes) seguiran alineades.

Però aquesta idea de “girar” el tauler, o, si ho preferiu, mirar-lo des de diferents punts de vista, no s’acostuma a desenvolupar. Més endavant sorgiran dificultats similars a l’hora d’identificar rectes perpendiculars, d’acord amb la posició de les mateixes, o també en la identificació de certes figures (per exemple, un quadrat dibuixat de manera que les seves diagonals siguin respectivament paral·leles als costats del full). Així, la pràctica d’un joc com el tres en ratlla, no només incidirà en aspectes com el correcte seguiment de les regles del joc, o la recerca d’estratègies per guanyar, sinó que contribuirà a la construcció d’aspectes conceptuals, en aquest cas la idea d’alineació a través d’un procés de visualització que cal practicar reiteradament.

- c) Un tercer exemple, que podríem qualificar d’entreteniment matemàtic, ens el proporciona la situació següent: Hem de situar els nombres de l’1 al 9 en les nou caselles quadrades del dibuix. Un cop omplertes les caselles, a cada cercle anotarem el resultat de multiplicar els dos nombres de les caselles quadrades que toquen el cercle. Com hem de situar els nombres inicials si volem que la suma de tots els nombres dels cercles sigui la més gran possible? El treball al voltant d’aquesta situació ens permet veure que en un primer nivell els alumnes hauran de fer un bon nombre de multiplicacions mentals de nombres d’una xifra (dotze per cada proposta de solució) i després una suma de dotze nombres; però és clar que aquesta no és la finalitat (encara que és indispensable, tan sols forma part del camí), sinó que a partir d’un primer resultat caldrà pensar quina modificació de la posició dels nombres ens proporcionarà un resultat millor (més gran), entrant en una fase de raonament (relació entre els nombres i les caselles) i de presa de decisions, pròpia de la resolució de problemes.



Entenc que els tres exemples presentats corresponen a situacions que contenen elements per fer matemàtiques (des de la construcció de conceptes fins a la determinació d'estratègies, passant per la pràctica de rutines) i són adaptables a diferents nivells. Tanmateix hi ha moltes altres situacions l'interès de les quals sorgeix no tant de la pròpia situació com d'una formulació i d'una gestió adequades. Fixeu-vos en el següent problema: Trobar quatre nombres que sumin 10. Si el plantejem així, sense res més, es pot dir que no hi ha problema, ja que $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Ara bé, n'hi ha prou d'afegir si la solució és única, o bé si és possible trobar-ne d'altres, per obrir la situació, generar dubtes, provocar discussions sobre el que diu i el que no diu l'enunciat i, en definitiva, convertir-la en un autèntic problema de matemàtiques, encara que el seu context sigui estrictament matemàtic.

És clar que per saber què passa quan proposem aquesta tasca als alumnes, cal provar-ho a classe, però és habitual l'aparició de dubtes i preguntes que fan referència a si es poden repetir nombres, si el zero es pot utilitzar (el zero és un nombre?), si es poden utilitzar altres tipus de nombres (fraccions, decimals, etc.), i d'acord amb les decisions que es vagin prenent s'aniran generant diferents problemes amb un nombre creixent de solucions, passant del cas inicial amb una sola solució (nombres naturals, sense el zero i sense repetir) a una quantitat infinita (nombres decimals).

6. Sobre la gestió de les activitats: parlar i escriure per aprendre

La importància del llenguatge per a l'aprenentatge en tots els camps i a tots els nivells, i, en particular, la relació entre les capacitats cognitives i les lingüístiques és actualment un aspecte prou conegut, però m'atreveixo a afirmar que en el cas de les matemàtiques no és sempre prou tingut en compte. No es tracta només de considerar el paper del llenguatge en la comunicació, que és evidentment fonamental, sinó de tenir en compte que el desenvolupament del llenguatge, tant oral com escrit, té una gran incidència en l'aprenentatge, és a dir, en la construcció de significats. En tot cas, comparteixo les idees que s'expressen en el llibre *Parlar i escriure per aprendre* i que us recomano de llegir.

Per aprendre matemàtiques cal que els alumnes facin matemàtiques, però, tan important com fer és parlar (i a partir d'uns determinats nivells, escriure) sobre allò que

es fa, no només amb la intenció de comunicar-ho als altres de manera que resulti entenedor, sinó amb la finalitat de prendre consciència d'allò que fem i consegüentment de millorar el propi aprenentatge. Per tant, és necessari que a classe parlem *de* i *sobre* matemàtiques (d'una tasca concreta que estem treballant, del que estem aprenent, del sentit que té allò que fem, etc.) i és possible fer-ho sempre que nosaltres, com a gestors de l'aprenentatge dels infants, propiciem, a dins de l'aula, espais per al diàleg, la discussió i la reflexió.

Certament la relació entre llenguatge i matemàtiques és complexa; cal tenir en compte que quan fem matemàtiques, a més del llenguatge verbal, utilitzem altres llenguatges propis de la disciplina (numèric, geomètric, gràfic, algèbric, etc.) els quals cal dotar de significat. En primer lloc, quan fem matemàtiques utilitzem un conjunt de paraules específiques, algunes de les quals tenen només significat dins de les matemàtiques, i altres que també s'utilitzen en altres àmbits encara que amb un significat no sempre coincident (per exemple, pensem en el terme *base* que d'acord amb el diccionari és "*allò sobre què alguna cosa descansa*", i la seva aplicació a un triangle, que per la seva naturalesa *no descansa enlloc*). Aquest fet és una font de restriccions i moltes vegades de confusions (quantas bases té un triangle? O bé, què passa si el triangle està dibuixat de manera que a la part "inferior" del full hi ha un vèrtex?).

Pel que fa als termes específics, i de manera semblant amb els símbols matemàtics, la seva introducció ha de ser lenta i gradual, però sobretot és fonamental que tant les paraules introduïdes com els símbols s'utilitzin repetidament i en situacions diverses, per tal de dotar-los de significat.

Tanmateix, crec que l'ús dels símbols específics que utilitza el llenguatge matemàtic, i els quals cal anar dotant de significat a mesura que es van utilitzant, requereix un comentari específic que intentaré fer a través d'un exemple concret. Tots els que heu treballat amb alumnes dels darrers nivells de primària us heu trobat que, en la resolució d'un problema aritmètic que implica la realització de diverses operacions encadenades, molts nois i noies escriuen una expressió com la següent:

$$7 + 3 = 10 - 4 = 6 \times 7 = 42$$

Tot i la insistència per part dels mestres sobre la incorrecció de l'expressió anterior, i la proposta de substitució per formes correctes del tipus: $7 + 3 = 10$; $10 - 4 = 6$; $6 \times 7 = 42$; el cert és que molts alumnes segueixen escrivint expressions com les primeres

perquè consideren, des de la seva lògica, que són totalment correctes. Entenc que això és degut al significat que donen a l'expressió i, en particular, al signe igual (=). Per a la majoria de nens i nenes, aquest signe indica que cal efectuar l'operació que *sempre* apareix indicada a l'esquerra, posant-me el resultat a la dreta del signe igual. D'acord amb aquesta lògica entenen que el que han escrit és correcte, i penso que és així perquè en la immensa majoria de casos en què han utilitzat el signe igual ha estat d'aquesta manera (aquest és també el sentit que té el signe igual en la calculadora).

Per tant, si el que volem és que el signe igual indiqui que l'expressió de l'esquerra té el mateix valor que la de la dreta, haurem d'haver proposat, des de l'inici, situacions on aparegui clarament aquest significat i no un altre. En aquest sentit, pensem en la diferència entre proposar que es completi una expressió com $3 + 7 = \dots$, o bé una altra, com $10 = \dots$; en el primer cas els alumnes saben que han d'escriure el resultat de la suma, hi ha una instrucció precisa i a més, de resultat únic, i el signe igual és el que indica aquesta instrucció (què pensaríeu si un alumne escrivís: $3 + 7 = 9 + 1$? Seria magnífic, però és poc probable que succeeixi a causa de la instrucció implícita de la tasca proposada). En el segon cas ($10 = \dots$), en canvi, és possible que molts alumnes no sàpiguen què han de fer; cal entendre què es demana, hi ha moltes possibilitats ($10 = 3 + 7$, $10 = 8 + 2$, $10 = 17 - 7$, $10 = 5 \times 2$, $10 = 50 : 5$, etc.), en definitiva, la situació és oberta i exigeix, a més d'entendre el significat del signe igual, prendre una decisió de les moltes possibles.

Tot i la senzillesa de les dues situacions anteriors, la diferència és enorme i, al meu entendre, a més de portar-nos cap a dos significats diferents d'un signe matemàtic concret, treballa aspectes diferents (en el primer cas la suma, en el segon la descomposició lliure d'un nombre) i exemplifica dos plantejaments radicalment oposats, m'atreviria a dir, dues maneres diferents d'entendre el treball a la classe de matemàtiques. Així mateix, l'exemple que acabo d'exposar es relaciona amb la importància que tenen les propostes que fem als alumnes en relació amb la construcció de significats, i també amb la relació que hi ha entre els errors o les dificultats que manifesten els alumnes i els significats que atribueixen al llenguatge, en aquest cas a un determinat símbol matemàtic.

Per acabar aquest punt voldria referir-me a un altre aspecte que també té relació amb el llenguatge. Si bé és clar que la precisió dels significats és un punt fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, resulta paradoxal adonar-se que en el llenguatge habitual de les classes de matemàtiques moltes vegades s'amaguen implícits que

adquireixen sentit, sovint pervers, a dins de la classe i que allunyen les matemàtiques de les situacions reals a les quals es pretenen aplicar. És cert que quan tractem situacions reals quasi sempre cal fer simplificacions que ens permetin abordar la situació a partir de les matemàtiques que poden utilitzar uns alumnes determinats, d'acord amb el seu nivell de desenvolupament, però si posem l'èmfasi en els conceptes que estem treballant més que en la pròpia situació, podem desvirtuar-la de tal manera que perdi el seu autèntic sentit.

A tall d'exemple, sempre m'ha cridat l'atenció que quan a classe de matemàtiques apareixen situacions que corresponen a repartiments, aquests sempre es fan a parts iguals, detall que en la majoria d'enunciats no s'especifica i que es dona per suposat, ja que el que es pretén és, més que resoldre una situació real, utilitzar una operació determinada, en aquest cas la divisió. I si bé és cert que hi ha situacions en què efectivament el repartiment es fa a parts iguals, n'hi ha moltes altres en què això no és així, motiu pel qual em sembla important especificar el tipus de repartiment que es proposa en cada cas.

7. Context, significació i resolució de problemes

Encara que ja m'he referit a la importància de les activitats, voldria insistir en un punt que em sembla de la màxima importància per a l'aprenentatge de les matemàtiques i que es refereix específicament al treball a la classe i al paper que en ell té la resolució de problemes. Nombrosos autors, tant de l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques com de la psicologia, han assenyalat la importància de la resolució de problemes en relació amb l'aprenentatge: Abrantes considera que cal crear un ambient de resolució de problemes a classe, de manera que els problemes esdevinguin l'autèntic motor per fer matemàtiques i estic d'acord amb ell, i també amb Edo, quan diuen que una gran part de l'activitat matemàtica escolar s'hauria de centrar en l'exploració de situacions problemàtiques. De fet, els exemples que he exposat abans, més que activitats concretes constitueixen situacions contextualitzades que permeten abordar les matemàtiques des d'aquesta òptica.

Tanmateix, per tal de crear un ambient de resolució de problemes, en el qual apareguin autèntics problemes per resoldre, cal que es donin certes condicions que permetin apropar les tasques proposades a problemes matemàtics reals. En aquest

sentit, Onrubia, Rochera i Barberà, destaquen, a més a més de la rellevància de les tasques, la importància que té que aquestes comparteixin la finalitat d'apropament als continguts matemàtics, amb altres finalitats no necessàriament matemàtiques d'interpretació de la realitat i d'actuació en aquesta. Al mateix temps, és important que els problemes puguin ser plantejats i definits pels mateixos alumnes (i no només pels mestres i els textos), i que es tracti de tasques més o menys obertes, tant pel que fa a la possibilitat d'abordar-les de diverses maneres, com per la naturalesa de les seves solucions, que poden ser diverses i no necessàriament exactes.

És clar que, en aquest context, el paper del mestre resulta essencial, ja que és ell qui condueix el procés, qui possibilita, encoratja o limita l'ús de procediments personals per a resoldre les tasques plantejades, qui valora el nivell de pertinença de les respostes donades pels alumnes i qui proporciona elements per tal que aquestes respostes puguin ser compartides pels altres. També és el mestre qui ha d'intentar establir, gradualment, ponts entre les diverses realitzacions dels alumnes (que inclouen les seves pròpies formes de representació) i les formes de raonament i sistemes de representació propis de les matemàtiques, de manera que el treball realitzat contribueixi realment a la construcció del coneixement matemàtic per part dels alumnes.

8. Algunes reflexions finals

Com deia a la introducció, amb aquesta conferència he intentat provocar una reflexió en cadascú de vosaltres sobre què significa ensenyar matemàtiques i sobre les vostres pràctiques quotidianes quan ensenyeu matemàtiques als vostres alumnes. Com a síntesi de tot el que he exposat, voldria presentar-vos les següents consideracions finals:

Crec que una tasca important que podeu realitzar a dins de cada escola és la de treballar per dotar-vos d'una bona selecció de situacions en contextos rellevants, que s'articulin en un conjunt d'activitats matemàtiques per proposar als vostres alumnes, i d'una gestió d'aquestes activitats que propiciï realment el seu aprenentatge, de manera que en tota classe de matemàtiques els alumnes tinguin realment la possibilitat de construir, tant individualment com col·lectivament, els conceptes i els

procediments fonamentals i al mateix temps desenvolupin actituds positives envers les matemàtiques.

També cal que treballem en la línia d'aconseguir que els aprenentatges esdevinguin funcionals, per la qual cosa, una tria acurada de les activitats és important, però encara ho és més afavorir i guiar la progressiva autonomia dels infants, donant-los oportunitats per actuar, reflexionar, discutir amb els companys, prendre decisions, argumentar la seva validesa, però també per equivocar-se i per modificar les seves actuacions.

Hem de reflexionar sobre aquelles pràctiques “velles”, que sovint repetim per inèrcia, ja que si introduïm noves activitats i noves maneres de treballar haurem de deixar de fer-ne d'altres que segurament hem practicat durant molts anys. En definitiva, cal analitzar críticament el currículum que se'ns proposa, així com la viabilitat de la seva implementació, distingir el més important d'allò que no ho és tant, però prenent consciència que, a vegades, aquella sensació que tenim que no és possible fer tot el que sens demana pot ser més el resultat de la nostra interpretació que del que realment hi ha escrit en els documents oficials.

Cal lluitar contra el tòpic, a vegades massa estès, segons el qual els alumnes cada vegada saben menys coses, pensant que segurament saben moltes altres coses i d'una manera diferent, i tractar de desvetllar el seu interès i la seva capacitat d'interrogació sobre tot allò que els envolta, per tal que les matemàtiques que fem a l'aula esdevinguin realment una activitat interessant per a cadascun dels nens i nenes que tenim a la classe.

També hem de ser capaços d'entendre i aprendre dels nostres propis errors, matemàtics i no matemàtics, ja que d'errors i dificultats en tenim tots; però, sobretot, hem de fer tot aquest treball, certament complex, sense angoixa (només som responsables d'intentar fer el nostre treball el millor possible), amb il·lusió i aprofitant les possibilitats que ens ofereixen els infants, cada dia, d'aprendre i descobrir noves coses.



En definitiva, les matemàtiques han de formar part de la formació de tots els ciutadans, sempre que allò que treballem tingui sentit i proporcioni eines per conèixer millor el món, ajudi a fer crítiques fonamentades i possibiliti la realització de canvis que hauran de permetre millorar el món en què vivim.

Referències bibliogràfiques

Abrantes, P. (1996) El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO*, núm. 8, p. 7-18.

Armendariz, M.V., Azcárate, C. Deulofeu, J. (1993) Didáctica de las Matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje*, p. 62-77.

Bishop, A. (1999) *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós (l'original és de 1988).

Cockcroft, W.H. (1985) *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: M.E.C.

Coll, C. (1989) *Conocimiento psicológico y práctica educativa*. Barcelona: Barcanova.

Coll, C. (2001) Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. *Desarrollo psicológico y educación 2: Psicología de la educación escolar*. (Coll, C., Palacios, J., Marchesi, A., editors). Madrid: Alianza, p. 157-186.

Corbalán, F. Deulofeu, J. (1996) Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *UNO*, núm. 7, p. 71-80.

Deulofeu, J. (2000) Pensant en el 2001: resolució de problemes, activitat matemàtica i raonament. *Perspectiva Escolar*, núm. 242, p. 36-43.

Deulofeu, J. (2001) *Una recreación matemática. Historias, juegos y problemas*. Barcelona: Planeta.

Dickson, L., Brown, M., Gibson, O. (1991) *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC-Labor.

Edo, M. (2002) *Joc, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Lladó, C.-Jorba, J. (1998) L'activitat matemàtica i les habilitats cognitivolingüístiques. *Parlar i escriure per aprendre*. (Jorba, J., Gómez, I., Prat, A., editors) Barcelona: ICE de la Universitat Autònoma de Barcelona, p. 255-280.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1988) *Pensar matemàticament*. Barcelona: Labor-MEC.

NCTM (1991) Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales.

Onrubia, J., Rochera, M.J., Barberá, E. (2001) La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. *Desarrollo psicológico y educación 2: Psicología de la educación escolar* (Coll, C., Palacios, J., Marchesi, A., editors). Madrid: Alianza, p. 487-508.

Puig Adam, P. (1937) El que podria ésser l'ensenyament de les matemàtiques a l'Institut Escola. *Butlletí de l'Institut Escola*.